

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barème : Réponse juste : 1.5 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. Une onde de Mach :

- a. est isentrope.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. a une pente (par rapport à l'écoulement) qui est toujours plus petite qu'une onde de choc oblique pour un même nombre de Mach en amont.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. peut être courbe (n'est pas obligatoirement rectiligne).

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. quand la température augmente, la masse volumique augmente.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. le nombre de Mach peut prendre n'importe quelle valeur.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. la température totale est invariante.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :

- a. l'écoulement accélère tout le long.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. une onde de choc ne se produit jamais dans la partie convergente.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. des ondes de Mach sont toujours présentes dans le divergent.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. le nombre de Mach le long de la tuyère se calcule en divisant la vitesse de

l'écoulement dans la tuyère par la vitesse du son dans le laboratoire à des conditions standard.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. le jet sortant de la tuyère est toujours supersonique.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- f. le bruit peut remonter l'écoulement uniquement dans le convergent.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

4. Un choc droit dans un gaz parfait :

- a. ne fait pas varier la pression totale.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

b. ne peut jamais être suivi ou précédé d'un autre choc droit (en 1D). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

c. engendre une diminution de la température statique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

d. se déplace à une vitesse supérieure de celle du son de l'air ambiant au repos.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

e. est une onde de Mach pour Mach égal à 1. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

5. Un choc oblique :

a. est moins intense qu'un choc droit pour un même nombre de Mach. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

b. ne peut jamais être en contact avec une surface plane. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

c. dévie toujours l'écoulement pour le rapprocher de la normale au choc. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

d. n'a qu'une seule solution pour un nombre de Mach donné en amont. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:

- a. est un assemblage d'ondes de Mach.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est isentrope.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. détend toujours l'écoulement (réduit la pression).

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

Barême :

Ex 1: 28 pts ; Ex 2 : 36 pts

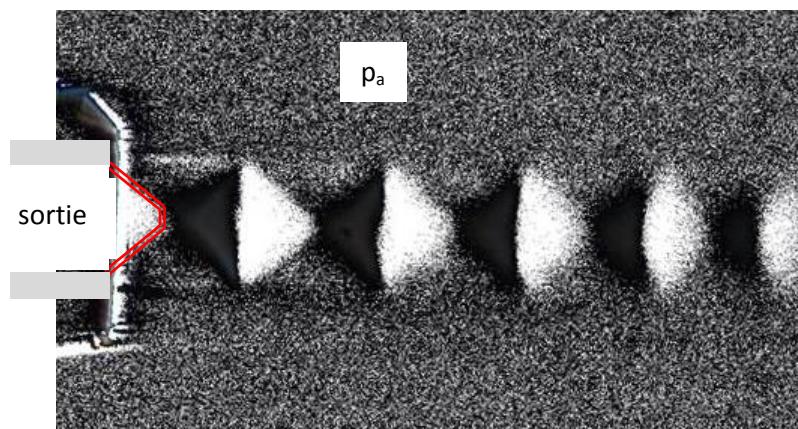
Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués

Jusqu'à 11h15 max

1. Buse microscopique (28 points)

Une entreprise suisse fabrique des buses microscopiques de précision (petites tuyères convergentes-divergentes) utilisées pour « aspirer » des micro-composants électroniques et les déposer (« pick-and-place ») précisément. L'écoulement à la sortie de ces buses a été visualisé. L'écoulement est supersonique en sortie de buse, avec des ondes de choc obliques (indiquées en rouge) suivies de la morphologie classique du sillage en « diamant », composé d'une succession d'ondes de choc et de détentes.

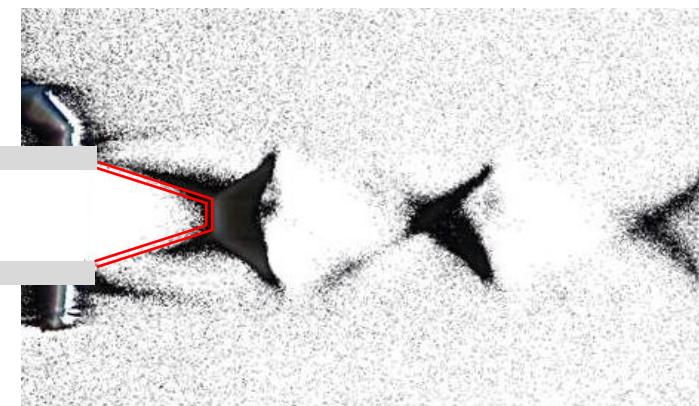


L'écoulement d'air a été généré avec une pression de réservoir p_0 égale à 3 bar. Le diamètre de la tuyère à la sortie est de 400 microns (!). La pression arrière p_a est 1 bar. L'angle de l'onde de choc θ est de 50 degrés (par rapport à l'écoulement en sortie).

- a. Montrer que, si M est le nombre de Mach en sortie de tuyère et si une onde de choc oblique existe en sortie de tuyère, alors :

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M^2 \sin^2 \theta - 1)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

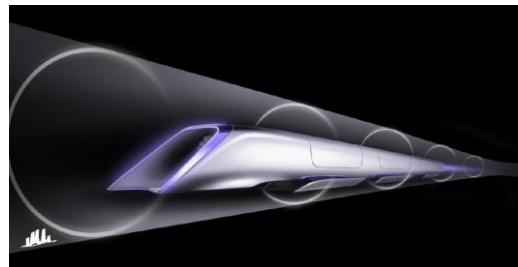
- b. Vérifier que, avec $\gamma = 1.4$, le nombre de Mach en sortie est égal à $M = 1.97$.
- c. Evaluer l'aire du col de la tuyère.
- d. Une deuxième expérience dans la même tuyère et avec la même pression arrière, mais avec une pression de réservoir de 5 bar, a donné l'écoulement suivant.



- i. Montrer que le nombre de Mach en sortie de change pas (malgré un changement de la pression de réservoir).
- ii. Evaluer l'angle de l'onde de choc oblique dans ce cas et vérifier que la réponse est cohérente avec la photo.
- e. Evaluer la pression de réservoir nécessaire pour atteindre le point de fonctionnement (écoulement sans ondes de chocs en sortie).
- f. Pour le premier cas avec une pression de réservoir de 3 bar, indiquer si, oui ou non, un disque de Mach apparaît (comme dessiné, avec des ondes de choc obliques qui ne se croisent pas directement).

2. Hyperloop (36 points)

Elon Musk a lancé (ou relancé) l'idée d'un train haute vitesse confiné dans un tube dépressurisé. Il a réalisé très tôt (Projet Hyperloop Alpha 2013) qu'un véhicule dans un espace confiné (tube) serait soumis à de sévères limitations de vitesse liées à des effets de compressibilité.

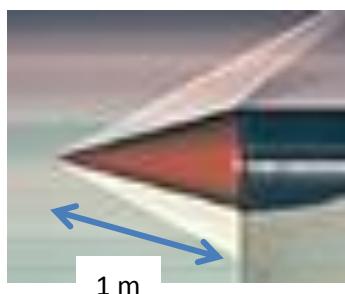


I. Véhicule à l'air libre

Sur le banc d'essai de Holloman High Speed Test Track, un chariot (« pod ») sur rail peut être propulsé par des réacteurs de fusée à très haute vitesse (jusqu'à plus de Mach 8, qui est le record de vitesse sur terre ferme).

- En considérant le nez du pod comme un dièdre bi-dimensionnel (ce qui n'est pas le cas car il est axi-symétrique) de demi angle de 10 degrés et de longueur de 1 m (voir photo), estimer la force de résistance (traînée) agissant sur ce dièdre (de 1 m de profondeur) ainsi que sa vitesse pour Mach 4, une pression atmosphérique de 100'000 Pa et pour une température ambiante de 40 degrés Celsius, en n'oubliant pas de soustraire la force de pression due à la pression atmosphérique (statique) ambiante.

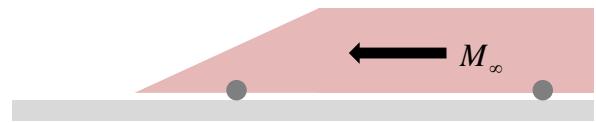
PS : les photos ci-dessous ont été prises pour un nombre de Mach beaucoup plus faible (autour de 1.8).



- Trouver le nombre de Mach sur la partie horizontale du pod (juste après la rampe du dièdre).
- Refaire le calcul de force pour une pression ambiante hypothétique de 100 Pa (comme préconisée pour le Hyperloop).

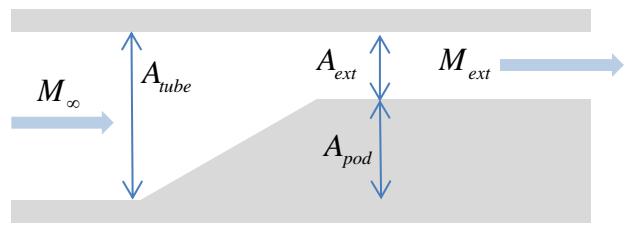
II. Véhicule dans un tube

L'idée de réduire la pression ambiante semble donc séduisante pour réduire les forces de traînée, d'où l'idée de confiner le train dans un tube dépressurisé.



On modélise le chariot (« pod ») par un demi-dièdre bi-dimensionnel dans un tube lui aussi bi-dimensionnel (avec une certaine profondeur) se déplaçant à Mach M_∞ .

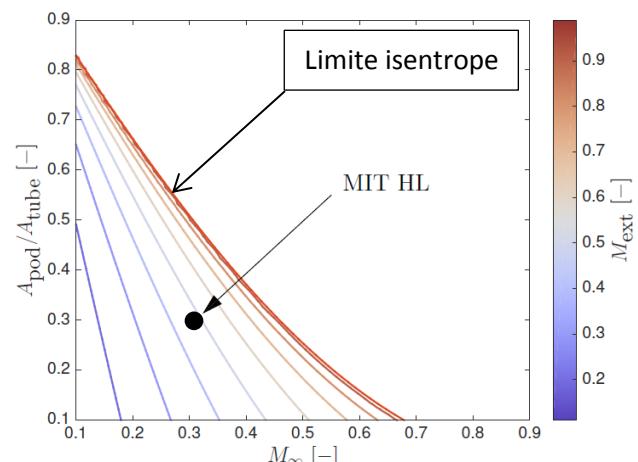
On change de référentiel en se mettant fixe par rapport au chariot, conduisant ainsi à un écoulement d'air de vitesse égale et opposée à celle du chariot à travers une conduite convergente. Le nombre de Mach autour du chariot est dénoté M_{ext} .



a. Limite isentrope de vitesse

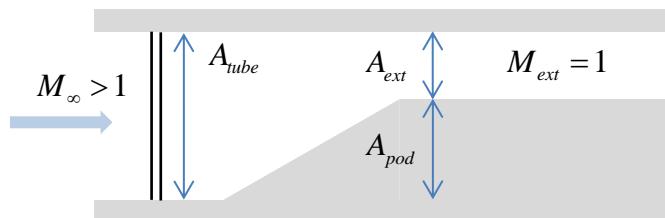
Pour un nombre de Mach M_∞ inférieur à 1, Musk a tout de suite réalisé qu'au moment où l'écoulement autour du chariot devient sonique ($M_{ext} = 1$), le chariot a un « effet de seringue » : le chariot agit tout simplement comme un piston, forçant ainsi l'air dans le tube en amont du chariot à se déplacer avec lui.

- Montrer qu'une dépressurisation isotherme ne change pas la vitesse du son.
- Justifier qualitativement le concept de « seringue » (suggestion : penser au débit d'air dans le référentiel fixe par rapport au chariot).
- Pour un rapport d'aire du tube (A_{tube}) et de surface frontale du pod (A_{pod}) égal à 3, calculer le nombre de Mach maximal du chariot au moment où intervient ce phénomène de « seringue » ($M_{ext} = 1$). Vérifier que la valeur obtenue correspond à celle de la courbe rouge (sur le schéma ci-contre) dénotée par « limite isentrope » (le schéma, produit par le MIT, contient également le point de fonctionnement du chariot du MIT dans le Hyperloop Pod Competition).



b. Limite de Kantrowitz

Dans le rapport initial de Musk (2013) apparaît le concept de « limite de Kantrowitz ». Cette limite n'est pas celle calculée précédemment (qu'on préfère dénoter « limite isentrope »), mais est analogue au phénomène du démarrage d'un réacteur d'avion avec l'apparition d'une onde de choc à l'entrée de la tuyère. Indépendamment du processus de démarrage qui permettraient une telle réalisation pour Hyperloop, la limite de Kantrowitz est donc évaluée avec un choc (stationnaire dans le référentiel du pod) en amont du pod, et un écoulement sonique autour du pod ($M_{ext} = 1$), donnant ainsi la vitesse maximale du chariot, qui est maintenant supersonique ($M_\infty > 1$). La réalisation de la limite de Kantrowitz est probablement impossible pour le Hyperloop, qui est destiné à rester un véhicule subsonique.



- i. Pour l'aire du tube trois fois plus grande que l'aire du pod (comme précédemment), trouver le nombre de Mach M_∞ du pod dans la limite de Kantrowitz (même si ce régime n'est pas atteignable pour le Hyperloop, qui restera subsonique).
- ii. La limite de Kantrowitz est souvent écrite comme le rapport d'aire du tube A_{tube} sur l'aire A_{ext} en fonction d'une expression (compliquée) ne faisant intervenir que le nombre de Mach avant le choc M_∞ (avec $M_{ext} = 1$). Trouver cette équation sans essayer de la simplifier (il en existe plusieurs formes de ces équations dans la littérature, donnant toutes le même résultat malgré une apparence visuelle différente).

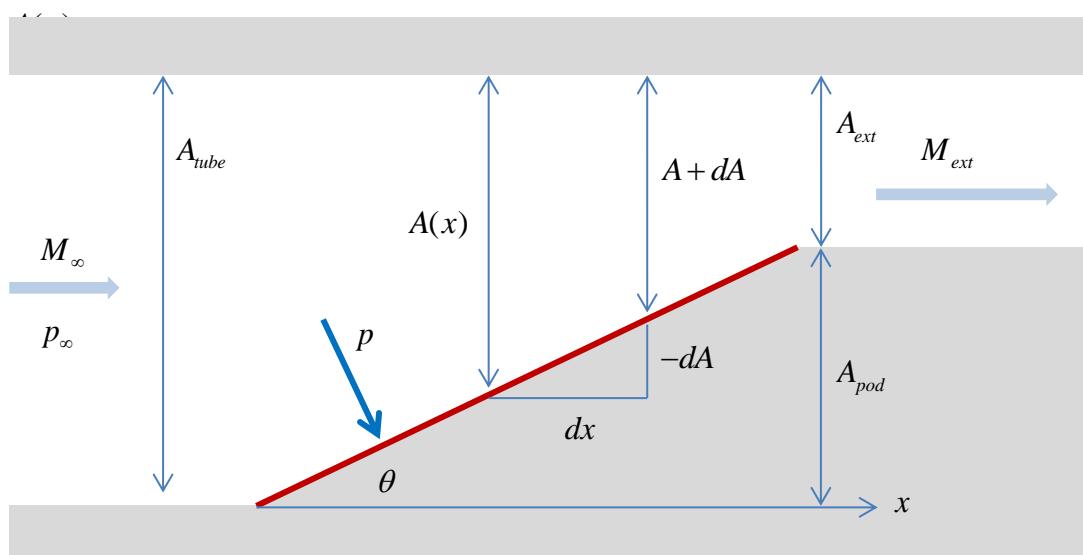
PS : Kantrowitz était un ingénieur qui dans les années 1950 a étudié les limites de fonctionnement des réacteurs supersoniques.

c. Forces de pression

La dépressurisation, à défaut de permettre de hautes vitesses (dans un tube), peut diminuer les forces de résistance de l'air. Afin d'estimer ces forces, nous allons considérer un écoulement subsonique et isentrope, et utiliser la théorie des écoulements quasi uni-dimensionnels dans une tuyère convergente. L'écoulement est ainsi uniquement selon l'axe horizontal et les variations de vitesse se font uniquement à cause du change d'aire local (Chapitre 5).

Deux différentes méthodes (conduisant au même résultat) seront utilisées. L'objectif est d'estimer la force agissant sur la paroi rouge (qui, comme on le verra, peut avoir n'importe quelle forme et n'a pas besoin d'être plane). Il y aurait les forces agissant sur l'arrière de l'appareil (non négligeables), mais que nous n'étudierons pas dans cette analyse.

i. Méthode d'intégration de la pression sur une surface



Le but est d'intégrer la pression agissant sur la paroi et prendre la composante horizontale (correspondant à la force de résistance). La force verticale est importante pour le pod, mais ne sera pas évaluée dans ce problème.

Montrer que la force de résistance (nette) agissant sur la paroi rouge est donnée par :

$$F_x = L \cdot \int_{paroi} (p - p_\infty) \cdot \sin \theta \cdot \frac{dx}{\cos \theta}$$

où L est la profondeur et p_∞ la pression ambiante dans le tube (égale à 100 Pa pour Hyperloop).

Montrer ainsi que cette force peut s'écrire :

$$F_x = - \int_{paroi} (p - p_\infty) \cdot dA$$

où dA est la variation d'aire de la tuyère (avec $dA < 0$ dans le cas de cette tuyère convergente).

Montrer que le terme avec p_∞ donne simplement :

$$- \int_{paroi} (-p_\infty) \cdot dA = -p_\infty \cdot (A_{tube} - A_{ext})$$

qui est donc un terme négatif (qui représente uniquement l'effet de la pression statique et qui est donc soustrait des forces de pression).

L'objectif est d'exprimer la pression $p(x)$ et l'aire de la tuyère $A(x)$ en fonction du nombre de Mach local $M(x)$, et de pouvoir ainsi effectuer une intégration sur M :

$$\int_{paroi} p \cdot dA = \int_{M_\infty}^{M_{ext}} p(M) \cdot dA(M)$$

Montrer que :

$$\int_{M_\infty}^{M_{ext}} p(M) \cdot dA(M) = p_0 \cdot A^* \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \int_{M_\infty}^{M_{ext}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2 \right)^{-3/2} \cdot dM$$

où p_0 est la pression totale de l'écoulement et A^* l'aire du col sonique dans cette tuyère.

Suggestion : partir de l'expression suivante

$$p \cdot dA = p \cdot A \cdot \frac{dA}{A}$$

et utiliser les expressions adéquates pour chaque terme en fonction de M .

Avec Mathematica ou Matlab, on obtient:

$$\int_{M_\infty}^{M_{ext}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{-3/2} \cdot dM = \left[\frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}} \right]_{M_\infty}^{M_{ext}}$$

Ainsi :

$$\int_{M_\infty}^{M_{ext}} p(M) \cdot dA(M) = p_0 \cdot A^* \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \left[\frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}} \right]_{M_\infty}^{M_{ext}}$$

Exprimer la pression totale p_0 en fonction de p_∞ et M_∞ , ainsi que A^* en fonction de A_{tube} et M_∞ , et trouver alors :

$$F_x = -p_\infty \cdot (A_{tube} - A_{ext}) - p_\infty \cdot A_{tube} \cdot M_\infty \cdot \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2} \cdot \left[\frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}} \right]_{M_\infty}^{M_{ext}}$$

Bien remarquer que l'expression ne dépend pas de la forme du pod. On voit aussi que la force dépend linéairement de la pression ambiante dans le tube.

Application numérique :

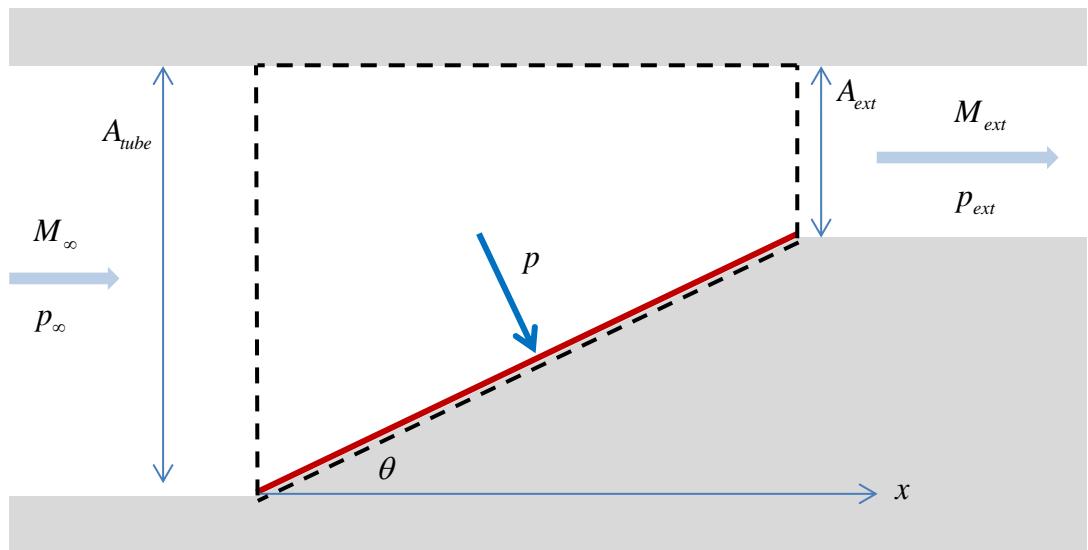
Evaluer la force pour un rapport d'aire de tube sur aire de pod égal à 3, une aire de tube de 4 m^2 , une pression dans le tube de 100 Pa, et pour des conditions isentropes sans ondes de choc et soniques autour du pod ($M_{ext} = 1$). Attention au signe.

Commenter et expliquer en particulier quelles autres forces il faudrait prendre en compte.

ii. Méthode de conservation de quantité de mouvement linéaire

On va maintenant obtenir cette même expression en utilisant le principe de conservation de quantité de mouvement (Formule d'Euler).

Soit un volume de contrôle comme dessiné sur le schéma ci-dessous.



En utilisant les équations de conservation de quantité de mouvement sous forme intégrale (formule F.32), montrer que :

$$F_x = (\rho_\infty \cdot V_\infty^2 \cdot A_{tube} + p_\infty \cdot A_{tube}) - (\rho_{ext} \cdot V_{ext}^2 \cdot A_{ext} + p_{ext} \cdot A_{ext}) - p_\infty \cdot (A_{tube} - A_{ext})$$

où V est la vitesse de l'écoulement et ρ sa masse volumique.

En utilisant les relations appropriées pour des écoulements isentropes quasi-unidimensionnels, montrer que :

$$\rho \cdot V^2 \cdot A = p_0 \cdot A^* \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{\gamma M}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}}$$

et :

$$p \cdot A = p_0 \cdot A^* \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{M \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}}$$

et qu'ainsi l'expression de la force est identique à celle trouvée précédemment.

① Buse microscopique

(a) Comme il y a des ondes de choc à la sortie alors l'écoulement est supersonique à la sortie.

Pour une tuyère convergente-divergente, ceci signifie que l'écoulement est isentropique tout le long de la tuyère.

Ainsi :

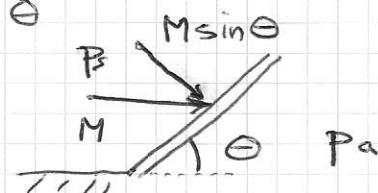
$$\frac{P_o}{P_s} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

F. 49

où M est le nombre de Mach en sortie.

Si l'onde de choc oblique a un angle θ par rapport à l'écoulement, alors le nombre de Mach normal est égal à :

$$M_n = M \cdot \sin \theta$$



Si l'on utilise F. 85 pour le rapport des pressions statiques du part et d'autre du choc :

$$\frac{P_a}{P_s} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_n^2 - 1) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 \sin^2 \theta - 1)$$

Ainsi :

$$\frac{P_a}{P_o} = \frac{P_a/P_s}{P_o/P_s} = \frac{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 \sin^2 \theta - 1)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

(b) Avec $\theta = 50^\circ$ et $M \approx 1,97$, on peut vérifier que :

$$\frac{P_a}{P_o} \approx \frac{1}{3} = \frac{1 \text{ bar}}{3 \text{ bar}} \quad (\text{avec } \gamma = 1,4)$$

(c) Comme l'écoulement est supersonique en sortie, il y a blocage sonique et

$$A_{\text{col}} = A^*$$

On peut utiliser soit les tables soit l'équation F. 61

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad \text{avec } M = 1,97$$

$$\rightarrow \frac{A_s}{A^*} = 1,6461 \quad \text{avec } A_s = \pi \frac{d_s^2}{4} = \pi \frac{(400 \cdot 10^{-6})^2}{4}$$

$$\rightarrow A^* = 7,63 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \rightarrow d^* = 311,8 \mu\text{m}$$



d) i) Comme l'écoulement reste isentropique et comme la géométrie de la buse ne change pas, alors

$$\frac{A_s}{A_{col}} = \frac{A_s}{A^*} \text{ ne change pas}$$

Comme selon F.6.1, $\frac{A_s}{A^*}$ n'est fonction que du nombre de Mach de sortie, alors M à la sortie ne change pas.

ii) On a donc toujours $M = 1,97$ à la sortie.

A partir de la formule de l'exercice a)

$$\frac{P_a}{P_0} = \frac{1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} (M^2 \sin^2 \theta - 1)}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{M^2} \left\{ 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left[\frac{P_a}{P_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \right\}$$

$$\theta = 37,27^\circ \quad \text{Sur la photo, l'angle a effectivement diminué}$$

(Attention: nos calculs sont 2D alors que la buse est 3D axisym.)

e) le point de fonctionnement est atteint quand $P_s = P_a$. le nombre de Mach en sortie reste égal à $M = 1,97$ pour les raisons énoncées en d).

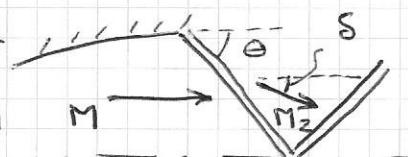
$$\text{Ainsi: } \frac{P_0}{P_s} = \frac{P_0}{P_a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow P_0 = 7,468 \text{ bar}$$

f) Un disque de Mach apparaît si l'écoulement, qui a été dévié par la première onde de choc oblique, ne peut être redévié dans la direction d'origine par une deuxième onde de choc oblique ("réflexion").

Voyons donc si une simple réflexion d'onde de choc oblique est possible.

Avec $\theta = 50^\circ$ et $M = 1,97$, le diagramme des ondes de choc oblique donne :



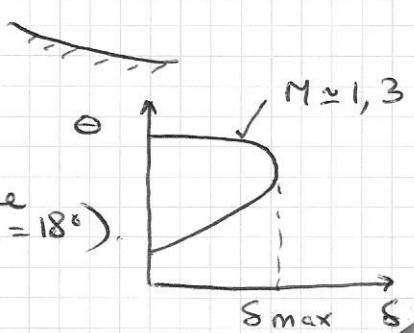
Pour trouver M_2 , on utilise soit la formule F.101 soit on calcule $M_{n1} = M \sin \theta$, on utilise les tables pour trouver $M_{n2} \approx 0,698$ et ensuite

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\theta - S)} \approx 1,317$$

Or, pour $M_2 = 1,317$, $S_{\max} \approx 8^\circ$,

ce qui veut dire qu'il n'est pas possible de redévier l'écoulement vers l'horizontal ($S = 18^\circ$).

→ il y a donc un disque de Mach.



2) Hyperloop

I) Véhicule à l'air libre

- (a) A partir du diagramme des ondes de choc oblique pour $M_1 = 4$ et $\gamma = 1.4$ ou avec une calculatrice programmable avec la formule F.102, on trouve

$$\theta \approx 22^\circ \text{ (ou } \theta = 22,234^\circ \text{)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{exact} \end{matrix}$$

A partir de la formule F.97 (ou les tables d'ondes de choc droites avec $M_{n_1} = M_1 \cdot \sin \theta$) on trouve :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1) = 2,506$$

La force de traînée est donnée par la projection selon l'horizontale des forces de pression P_2 .

En multipliant par 2 (pour la face inférieure et la face supérieure) et en soustrayant la pression ambiante :

$$\text{Traînée} = 2 \cdot (P_2 - P_1) \cdot \sin \theta \cdot L \cdot H$$

$$= 2 P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \cdot \sin \theta \cdot L \cdot H \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{profondeur} = 1m \end{matrix}$$

$$\text{Avec } P_1 = 100'000 \text{ Pa} \rightarrow \text{Traînée} = 52'304 \text{ N}$$

- (b) On peut trouver M_2 selon la formule F.101 ou selon la procédure de l'exercice 1F en utilisant les tables :

$$M_2 = 3,286$$

La fonction de Prandtl-Meyer donne :

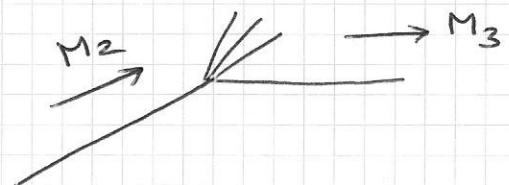
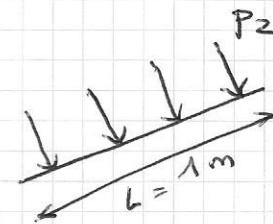
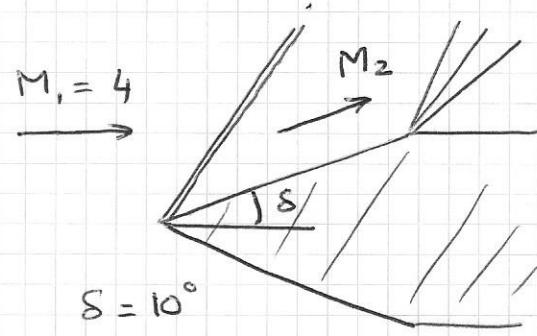
$$\nu(M_2) = 54,98^\circ$$

$$\text{Ainsi : } \nu(M_3) = \nu(M_2) - (-10^\circ) = 64,98^\circ$$

$$\rightarrow M_3 = 3,94$$

- (c) La traînée est proportionnelle à P_1 , donc diminuer la pression d'un facteur 1'000 diminue la traînée du même facteur.

$$\text{Traînée} = 52,3 \text{ N (!)}$$



II Véhicule dans un tube

a) limite isentrope

i) Comme $a = \sqrt{\gamma RT}$, la dépressurisation isotherme du tube ne change pas la vitesse du son.

Ainsi, les nombres de Mach ne dépendent pas de la pression initiale dans le tube

ii) La réponse exacte est complexe, mais qualitativement dès que $M_{ext} = 1$, il y a "blocage sonique". Comme on verra en iii), la valeur M_∞ aura une valeur max. La tentative d'accélérer le véhicule au-delà de cette valeur M_∞ crée une situation contradictoire avec la solution isentrope. Une manière d'éviter cette solution contradictoire est de déplacer le fluide en amont du véhicule (dans le sens du véhicule) et afin de maintenir la vitesse du véhicule par rapport à l'air en amont toujours constante et correspondant à M_∞ : ceci demande donc que tout l'air en amont soit poussé comme dans une seringue...

iii) Dès que $M_{ext} = 1$, alors $A_{ext} = A^*$

(dans le repère du pod, la géométrie est similaire à celle d'une tuyère convergente)

Avec $A_{tube} = A_{pod} + A_{ext}$

$$\rightarrow 1 = \frac{A_{pod}}{\underbrace{A_{tube}}_{1/3}} + \frac{A_{ext}}{A_{tube}} \rightarrow \frac{A_{tube}}{A_{ext}} = \frac{A_{tube}}{A^*} = \frac{3}{2}$$

A partir de la formule F.61 (et une calculatrice programmable) ou les tables isentropes, alors :

$M_\infty = 0,43$ (il faut prendre la valeur subsonique)

qui correspond bien à la valeur de la courbe rouge du NACA pour

$$\frac{A_{pod}}{A_{tube}} = \frac{1}{3}$$

b) Limite de Kantrowitz

i) On veut que le nombre de Mach en aval du choc soit le même que celui trouvé précédemment :

$$M_{n,2} = 0,43$$

A partir des tables pour ondes de choc droite ou la formule F.84 (et un peu d'algèbre), on trouve :

$$M_{n,1} = M_\infty = 4,197$$

Il faut remarquer que la pression en aval du choc augmentera considérablement et dépassera ainsi le principe de vouloir dépressuriser le tube.

ii) A partir de la formule F.61

$$\frac{A_{\text{tube}}}{A_{\text{ext}}} = \frac{1}{M_{n,2}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Or, pour un choc droit

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{\gamma M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

On obtient ainsi une formule assez complexe :

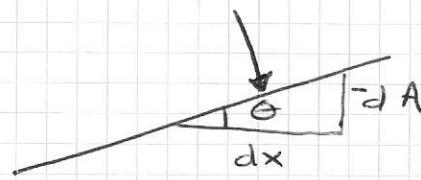
$$\frac{A_{\text{tube}}}{A_{\text{ext}}} = \text{fonction}(M_\infty)$$

c) Forces de pression

Contrairement au cas supersonique à l'air libre en subsonique la pression varie le long du déclivité

① Méthode d'intégration

Élément de surface: $L \cdot \frac{dx}{\cos \theta}$
profondeur



Élément de force selon x:

$$dF_x = (p - p_\infty) \cdot \left(L \cdot \frac{dx}{\cos \theta} \right) \cdot \sin \theta$$

$$\rightarrow F_x = L \cdot \int_{\text{paroi}} (p - p_\infty) \tan \theta \, dx$$

$$\text{Or: } \tan \theta = \frac{-dA}{L \cdot dx} \rightarrow F_x = - \int_{\text{paroi}} (p - p_\infty) dA$$

$$-\int_{\text{paroi}} (-p_\infty) dA = \int_{A_{\text{tube}}}^{A_{\text{ext}}} p_\infty dA = p_\infty (A_{\text{ext}} - A_{\text{tube}})$$

$$= -p_\infty (A_{\text{tube}} - A_{\text{ext}})$$

$$\text{Avec } p \cdot dA = p \cdot A \cdot \frac{dA}{A}$$

$$= p_0 \cdot \frac{P}{P_0} \cdot A^* \cdot \frac{A}{A^*} \cdot \frac{dA}{A}$$

$$F.49 \quad \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$F.61 \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$F.58 \quad \frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\rightarrow P \cdot dA = p_0 \cdot A^* \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^\beta$$

$$\text{avec } \beta = -\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} - 1 = \frac{-2\gamma + \gamma + 1 - 2(\gamma-1)}{2(\gamma-1)} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Avec } p_0 = p_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$A^* = \frac{A_{\text{tube}}}{\frac{1}{M_\infty} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

$$\rightarrow p_0 A^* = p_0 A_{\text{tube}} \frac{M_\infty}{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\beta'}$$

$$\text{avec } \beta' = \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = \frac{2\gamma-\gamma-1}{2(\gamma-1)} = \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$F_x = -p_0 (A_{\text{tube}} - A_{\text{ext}}) - p_0 \cdot A_{\text{tube}} \cdot M_\infty \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1 + \gamma M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/2}} \begin{cases} M_{\text{ext}} \\ M_\infty \end{cases}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} A_{\text{tube}} &= 4 \text{ m}^2, \quad A_{\text{ext}} = A_{\text{tube}} - A_{\text{pod}} \\ &= A_{\text{tube}} \left(1 - \underbrace{\frac{A_{\text{pod}}}{A_{\text{tube}}}}_{\frac{1}{3}}\right) \\ A_{\text{ext}} &= \frac{8}{3} \text{ m}^2 = 2,67 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$p_0 = 100 \text{ Pa}$$

$$M_\infty = 0,43$$

$$M_{\text{ext}} = 1$$

$$* - p_0 (A_{\text{tube}} - A_{\text{ext}}) = -133 \text{ N}$$

$$* - p_0 A_{\text{tube}} M_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \gamma M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/2}} \begin{cases} M_{\text{ext}} \\ M_\infty \end{cases} = +119,8 \text{ N}$$

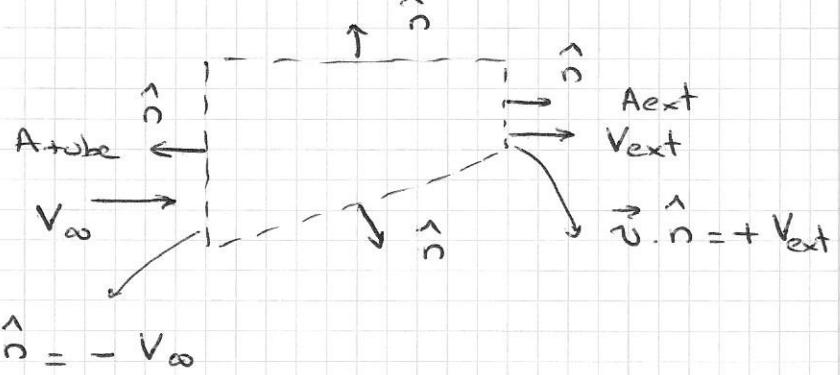
$$\rightarrow F_x = -13,2 \text{ N}$$

Il y a en fait une aspiration (classique en subsonique)
Il faudrait inclure les forces à l'arrière du véhicule.

(ii) Conservation de quantité de mouvement

Pour un écoulement permanent et non visqueux

$$\int_P \vec{v} \cdot (\vec{n}) \, dS = - \int_P \hat{n} \, dS$$



$$\text{Selon } \hat{x}: \int p \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \rho_\infty V_\infty (-V_\infty) A_{\text{tube}} \hat{x}$$

$$+ p_{ext} V_{ext} \cdot V_{ext} \cdot A_{ext} \cdot x$$

(il n'y a pas découlement à travers les autres parois)

$$-\int p \hat{n} ds = -p_0 (-\hat{x}) A_{\text{tube}} - p_{\text{ext}} (+\hat{x}) A_{\text{ext}}$$

- Spônd - Spônd
plafond paroi

En prenant la composante selon x :

$$F_x = \left(\int_{\text{paroi}} p \hat{n} \, dS \right) \cdot \hat{x} - p \infty (A_{\text{tube}} - A_{\text{ext}})$$

(les forces selon la verticale se compensent)

$$\rightarrow F_x = \left(p_\infty V_\infty^2 A_{\text{tube}} + p_\infty A_{\text{tube}} \right) - \left(p_{\text{ext}} V_{\text{ext}}^2 A_{\text{ext}} + p_{\text{ext.}} A_{\text{ext}} \right) - p_\infty (A_{\text{tube}} - A_{\text{ext}})$$

Or :

$$*\rho V^2 A = \frac{P}{rT} \cdot V^2 \cdot A = \gamma P \cdot M^2 \cdot A \\ = \gamma P_0 \cdot \frac{P}{P_0} \cdot M^2 \cdot A^* \cdot \frac{A}{A^*}$$

Avec $\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\rightarrow \rho V^2 A = P_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\beta''}$$

avec $\beta'' = -\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = -\frac{2\gamma + \gamma+1}{2(\gamma-1)} = -\frac{1}{2}$

$$*\rho \cdot A = P_0 A^* \frac{P}{P_0} \cdot \frac{A}{A^*}$$

$$\rightarrow \rho A = P_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi :

$$\rho A + \rho V^2 A = P_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{\frac{1}{M} + \gamma M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/2}}$$

$$= P_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1 + \gamma M^2}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}$$

qui donne donc la même expression que l'expression précédente.